



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**NÁVRH JEDNODUCHÉHO KALKULÁTORU PRO VYUŽITÍ
DUTÉ HŘÍDELE V ELEKTRICKÉM STROJI**

DESIGN OF COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR USING OF HOLLOWED SHAFT IN ELECTRIC MACHINE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jan Tobiáš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Jan Tobiáš**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Radek Vlach, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Návrh jednoduchého kalkulátoru pro využití duté hřídele v elektrickém stroji

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Kontrola namáhání rotoru elektrického stroje jeden z klíčových výpočtu pro ověření funkčnosti elektrického stroje jako celku. Cílem práce je navrhnout jednoduchý kalkulátor, který by obsahoval napěťově–deformační analýzu s ohledem na kritickou vlastní frekvenci. Jde v podstatě o analýzu nosníku na dvou podporách zatíženého hmotností mezi podporami. Rovněž by měl respektovat velikost díry v hřídeli jako možnost optimálnějšího návrhu rotoru elektrického stroje.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se s metodikou výpočtu nosníku na dvou podporách.
2. Návrh výpočtu kritických otáček duté hřídele s koncentrovanou hmotou mezi podporami.
3. Návrh výpočtu napětí a deformace duté hřídele s koncentrovanou hmotou mezi podporami.
4. Vytvoření jednoduchého kalkulátoru pro využití duté hřídele v elektrickém stroji.
5. Analýza dosažených výsledků.

Seznam doporučené literatury:

GERE, J.M., TIMOSHENKO, S.P.: Mechanics of Materials, third SI edition, Chapman & Hall, London, Glasgow, New York, 1995.

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA J., BURŠA, J.: Pružnost a pevnost I, VUT-FSI, Brno, 2004.

JANÍČEK, P., FLORIAN, Z.: Úlohy z pružnosti a pevnosti I, 2. vyd., VUT-FSI, Brno, 1995.

SLAVÍK, J., KRATOCHVÍL, C.: Dynamika, CERM, Brno, 2005.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá možností využití hřídele v elektrickém stroji. První část práce se zabývá vysvětlením pojmů z teorie mechaniky, které souvisejí s namáháním hřídele v ohybu. Konkrétně je zde pojednáno o způsobech výpočtu deformace a normálového napětí. Jako další je uvedena obecně teorie gyroskopů a vysvětlení jejího důsledku. V další kapitole je vysvětlena problematika kritických otáček. V další části práce je uveden postup řešení namáhání hřídele dle dříve vysvětlených analytických vztahů. Ty jsou odvozeny tak, aby podle nich bylo možné posuzovat namáhání a deformaci s ohledem na změnu vnitřního průměru. Praktická část se zabývá návrhem kalkulátoru pro využití duté hřídele v elektrickém stroji. Je vysvětleno, jak kalkulátor funguje a jak se s ním dá pracovat. V závěrečné části jsou uvedeny ukázky vypočtených výsledků a jejich analýza. Závěr nastiňuje možné využití a rozšíření nabytých poznatků.

Klíčová slova

Dutá hřídel, Castiglianova věta, gyroskop, kritické otáčky.

Abstract

The aim of this work is to develop the possibility of usage the hollow shafts in electric machines. The first part focus on explanation theory of mechanic, which is connected with loading of the shaft. Specifically are explained the methods of computation deformation and normal stress. Next is mentioned the theory of gyroscope and described its consequence. After that is explained problematique of critical speeds. In the following part is described process of solving the shaft loading according the previous analytic formulas. These formulas are formulated to be able to reflect the shaft loading depending on value of inner diameter as property. Practical part focus on creating the calculator for usage the hollow shaft in electric machines. In this chapter is described how the calculator works and how to controll it by user. In the last part are shown calculated results and their analysis. In the summary is mentioned possible usage of the results and ideas for improvements.

Key words

Hollow shaft, Castigliano's method, gyroscope, critical speeds,

Bibliografická citace

TOBIÁŠ, Jan. *Návrh jednoduchého kalkulátoru pro využití duté hřídele v elektrickém stroji* [online]. Brno, 2019 [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116994>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Radek Vlach.

Poděkování

Tímto bych rád vyjádřil své poděkování všem, kteří mě během tvorby této práce podpořili. Zejména chci poděkovat doc. Ing. Radku Vlachovi, PhD. za praktické rady a cenné připomínky, dále pak Ing. Martinu Appelovi, za pomoc se softwarem pro tvorbu samotného kalkulátoru.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci „Návrh jednoduchého kalkulátoru pro využití duté hřídele v elektrickém stroji“ jsem vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Radka Vlacha, PhD. Současně prohlašuji, že jsou řádně ocitovány všechny zdroje literatury, které jsem pro svou práci použil.

V Brně dne

.....
Jan Tobiáš

Obsah

Úvod	9
1 Namáhání hřídele	10
1.1 Prostý ohyb	10
1.1.1 Napjatost a deformace	10
1.1.2 Výpočet deformace při ohybu	11
1.2 Teorie gyroskopů	12
1.3 Kmitání hřídelí	13
1.3.1 Ohybové kmitání	13
1.3.2 Krouživé kmitání a kritické otáčky	14
2 Řešení namáhání hřídele	16
2.1 Výpočtový model	16
2.2 Řešení za klidu	17
2.2.1 Průhyby za klidu	17
2.2.2 Napětí v kritických místech za klidu	18
2.3 Gyroskopický efekt na hřídeli	19
2.4 Řešení za rotace	21
2.4.1 Průhyby za rotace	21
2.4.2 Napětí v kritických místech za rotace	22
2.5 Výpočet kritických otáček	22
2.5.1 Sestavení matice pro kritické otáčky	22
2.5.2 Využití příčnickových součinitelů	23
2.5.3 Nalezení řešení kritických otáček	24
3 Návrh kalkulátoru pro využití hřídele v elektrickém stroji	25
3.1 Software pro návrh aplikací	25
3.2 Kalkulátor Dutý Hřídel	25
3.2.1 Požadavky na vstupní hodnoty	26
3.2.2 Grafické závislosti	26
3.2.3 Konkrétní hodnoty a číselné výsledky	27
4 Získaná data a jejich analýza	29
4.1 Průběhy mezi podporami	29
4.1.1 Napětí mezi podporami	29
4.1.2 Průhyby mezi podporami	31
4.2 Průhyby na letmém konci	33
4.3 Analýza dosažených výsledků	34

5	Závěr	37
6	Použité zdroje a literatura	38
7	Seznam obrázků	38
8	Seznam tabulek	38
9	Seznam příloh	38

Úvod

Hřídele elektromotorů jsou důležitým prvkem těchto zařízení. Slouží nejen jako nosný prvek rotujících součástí motoru, ale také převodu dodávané energie do jedné nesené součásti na užitnou práci jiné součásti. Z toho plyne, že by měla být kladena vyšší pozornost správnému a přesnému návrhu spolehlivé hřídele. K tomu je zapotřebí znát problematiku chování hřídele především s ohledem na namáhání a deformaci při ohybu a jelikož jde o součást pracující za rotace, je třeba brát zřetel také na její rezonanční frekvenci. V dnešní době užívání výpočtových softwarů v inženýrské praxi je provedení správného výpočtu hřídelů výrazně usnadněno.

Cílem této práce je rozšířit tuto oblast aplikací vlivů setrvačných účinků na výše uvedené problémy. Prakticky je cílem navrhnout jednoduchý kalkulátor, pro využití hřídelů v elektrickém stroji, který by uměl ve výsledných hodnotách zohlednit působení setrvačných účinků.

1 Namáhání hřídele

Podle teorie pružnosti pevnosti, lze hřídel modelovat jako nosník uložený na obecných podporách. V důsledku charakteru zatížení je hřídel namáhána převážně ohybovým momentem způsobeným silovým působením.

1.1 Prostý ohyb

Prostý ohyb je definovaný jako namáhání přímého, prizmatického prutu je-li splněno

- Platí obecné prutové předpoklady [1].
- Příčné průřezy zůstávají během deformace kolmé ke střednici. Příčné průřezy zůstávají rovinnými a natáčejí se kolem osy ležící v rovině daných průřezu [1].
- Jedinými nenulovými složkami VVÚ jsou ohybové momenty k osám kolmým na střednici prutu $M_{oy}(x)$ a $M_{oz}(x)$ [1].

1.1.1 Napjatost a deformace

V případě prostého ohybu se jedná o prostorovou deformaci, kdy poměrná přetvoření ε_x , ε_y a ε_z jsou nenulová.

Jelikož napjatost v ohybu má tahový, resp. tlakový charakter, platí:

$$\varepsilon_y(y, z) = \varepsilon_z(y, z) = -\mu \cdot \varepsilon_x(y, z) \quad (1.1)$$

Přičemž průběhy přetvoření v příčných průřezích mají lineární charakter.

Z podmínky kolmosti příčných průřezů na deformovanou střednici plyne, že úhlová přetvoření jsou nulová, platí [1]:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.2)$$

Napjatost je v případě prostého ohybu jednoosá a z Hookova zákon plyne:

$$\sigma_x(y, z) = E \cdot \varepsilon_x(y, z) \quad (1.3)$$

Normálové napětí má v příčném průřezu také lineární průběh.

Po úpravách s pomocí statické ekvivalence mezi složkami VVÚ a elementárními silami normálového napětí získáme vztah pro normálové napětí v ohybu [1]:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y \quad (1.4)$$

Hodnoty z a y jsou souřadnicemi bodu příčného průřezu v hlavním centrálním souřadném systému příčného průřezu, ze vztahu (1.4) tedy plyne, že nebezpečné místo je na okraji příčného průřezu.

Vztah (1.4) platí obecně pro prostorové úlohy. Jelikož hřídel lze modelovat jako nosník zatížený silami ležícími v jedné rovině, uvažujeme dále jako nenulové pouze napětí od ohybového momentu v jedné ose. Napětí pak stačí počítat upraveným vzorcem (1.5). Přičemž značení veličin podle os závisí na orientaci lokálního souřadného systému [1].

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{J_z} \cdot y \quad (1.5)$$

1.1.2 Výpočet deformace při ohybu

Jednou z možností řešení deformace při ohybu je užití Castiglianovy věty. Tato metoda vychází z obecné Castiglianovy věty pro energii napjatosti pro prostý ohyb [1] .

$$W = \int_{\gamma} \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx + \int_{\gamma} \frac{M_z^2(x)}{2EJ_z} dx \quad (1.6)$$

Podobně jako při výpočtu napětí, i zde lze uvažovat jako nenulový ohybový moment pouze kolem jedné osy a vztah (1.7) lze požívat ve tvaru [1] :

$$W = \int_{\gamma} \frac{M_y^2(x)}{2EJ_y} dx \quad (1.7)$$

Přičemž značení opět závisí na orientaci lokálního souřadného systému.

Platí, že deformační posuv na prutu v působišti síly je dán parciální derivací energie napjatosti, podle této síly [1] .

$$w_F = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_{\gamma} \frac{M_y^2}{2EJ_y} dx = \int_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial F} dx \quad (1.8)$$

Obdobně lze určit deformační natočení střednice v místě působení momentu na prut, a to derivací energie napjatosti podle tohoto momentu.

$$\varphi_M = \frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M} \int_{\gamma} \frac{M_y^2}{2EJ_y} dx = \int_{\gamma} \frac{M_y(x)}{EJ_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial M} dx \quad (1.9)$$

Nevýhodou této metody je to, že po výpočtu získáme pouze konkrétní hodnoty průhybu, nebo natočení v místě působení zatížení. Zjistit hodnoty průhybu nebo natočení v místě, kde nepůsobí žádné zatížení, je také možné. K tomu je třeba v takovém místě zavést tzv. doplňkovou sílu \vec{F}_D , nebo moment \vec{M}_D , dále provést výše uvedený postup výpočtu a po té zavedená doplňková zatížení položit rovno nule [1] .

Tento způsob výpočtu je vhodný pro odvození tzv. příčnickových součinitelů. Lze tak sestavit tabulkové vzorce pro snadný výpočet průhybu či natočení střednice při určité konfiguraci zatížení hřídele. Toto má své využití nejen při počítání deformací samotných, ale i při výpočtech týkajících se kmitání hřídelí, které z deformací vycházejí [1] [2] .

1.2 Teorie gyroskopů

Gyroskopem (setrvačником) nazýváme těleso, které koná sférický pohyb. Nejčastěji přitom jde o rotační tělesa, konkrétně rotující disky.

Vlastní osu rotace disku, nazývanou osou gyroskopu značíme ζ . Dále pak volíme osy ξ a η kolmé na osu gyroskopu, kdy platí, že momenty setrvačnosti k těmto osám jsou si rovny

$$I_\xi = I_\eta = I_p \quad [2] .$$

Všechny tři osy jsou zároveň hlavními osami setrvačnosti. Úhlovou rychlost ω pak rozložíme na složky ω_ζ do osy vlastní rotace a složku ω_p do roviny kolmé na osu gyroskopu tvořenou osami ξ a η . Vektor momentu hybnosti ke středu sférického pohybu \mathbf{L}_O rozložíme na složky stejným způsobem [2] .

$$L_\zeta = I_\zeta \cdot \omega_\zeta \quad (1.10)$$

$$L_p = I_p \cdot \omega_p \quad (1.11)$$

Složku L_p lze dále rozložit na složky kolmých os ξ a η .

$$L_{p\xi} = I_p \cdot \omega_{p\xi} \quad (1.12)$$

$$L_{p\eta} = I_p \cdot \omega_{p\eta} \quad (1.13)$$

Z vektorové rovnice vyjadřující změnu momentu hybnosti $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$, jako rychlost koncového bodu vektoru momentu hybnosti ke středu sférického pohybu \mathbf{L}_O získáme tři rovnice pro složky pohybujícího se systému ζ, ξ a η , spolu s předpokladem $I_\xi = I_\eta = I_p$ [2] :

$$I_p \cdot \left(\frac{d\omega_{p\xi}}{dt} - \omega_{p\eta}\Omega_\zeta \right) + L_\zeta\omega_{p\eta} = M_\xi \quad (1.14)$$

$$I_p \cdot \left(\frac{d\omega_{p\eta}}{dt} + \Omega_\zeta\omega_{p\xi} \right) - L_\zeta\omega_{p\xi} = M_\eta \quad (1.15)$$

$$\frac{dL_\zeta}{dt} = M_\zeta \quad (1.16)$$

Členy $(-L_\zeta\omega_{p\eta})$ a $(L_\zeta\omega_{p\xi})$ jsou zvláštní tím, že jsou závislé na velikosti úhlové rychlosti vlastní rotace gyroskopu kolem své osy ω_ζ . Vyjadřují tak vztah vlastní rotace gyroskopu na jeho pohyb, a jsou složkami tzv. gyroskopického momentu \mathbf{M}^G . Ten je určen záporně vzatou rychlostí koncového bodu složky momentu hybnosti L_ζ , a platí pro něj vztah [2] :

$$\mathbf{M}^G = -(\omega \times \mathbf{L}_\zeta) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{M}^G = -I_\zeta(\omega_p \times \omega_\zeta) \quad (1.18)$$

Gyroskopický moment lze tedy chápat jako vektorový součin momentu hybnosti k ose gyroskopu $I_\zeta\omega_\zeta$ s úhlovou rychlostí ω_p . Nebo také jako záporně vzaté Resselovo zrychlení vynásobené momentem setrvačnosti k vlastní ose rotace gyroskopu, kde ω_p je unášivá úhlová rychlost a ω_ζ je relativní úhlová rychlost sférického pohybu [2] .

Orientace gyroskopického momentu je taková, že se snaží nejkratší cestou ztotožnit osu gyroskopu s nositelkou vektoru unášivé úhlové rychlosti [2] .

1.3 Kmitání hřídelí

1.3.1 Ohybové kmitání

Při řešení kmitání hřídelí se využívá stejný model jako při řešení deformací, tedy rovinné úlohy nosníku uloženého na dvou podporách, zatíženého tíhami nesených hmot, nejčastěji rotujících disků.

Pro sestavování pohybových rovnic se využívá výše zmíněná metoda příčnickových součinitelů. Ty vyjadřují průhyb, respektive natočení nosníku v místě i od silového, resp. momentového zatížení v místě j . Využíváme tedy následujících součinitelů vyjadřujících [2] [3] :

- α_{ij} průhyb nosníku v místě i od jednotkové síly v místě j
- β_{ij} úhel pootočení nosíku v místě i od jednotkové síly v místě j
- γ_{ij} průhyb nosníku v místě i od jednotkového momentu v místě j
- δ_{ij} úhel pootočení nosníku v místě i od jednotkového momentu v místě j

Podle teorie pružnosti pevnosti platí pro průhyb y_i a natočení φ_i nosníku v místě i od sil F_j a momentů M_j v místě j vztahy [2] :

$$y_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} F_j + \gamma_{ij} M_{ij}) \quad (1.19)$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} F_j + \delta_{ij} M_{ij}) \quad (1.20)$$

Současně platí také Maxwellova věta o vzájemnosti posuvů a natočení [2] :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (1.21)$$

$$\beta_{ij} = \gamma_{ji} \quad (1.22)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (1.23)$$

Při dynamickém stavu zatížení hřídele (za rotace) je třeba zohlednit také vlivy setrvačných sil a momentů vnějšího zatížení, potom platí pohybová rovnice [2] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.24)$$

Kde \mathbf{M} je diagonální matice sestavená z hmotností m_i a momentů setrvačnosti I_i k ose kolmé k rovině kmitání. Vektor \mathbf{f} je vektor vnějších silových zatížení. Matici tuhosti \mathbf{K} lze sestavit inverzí k matici poddajnosti \mathbf{G} , která je sestavena z příčnickových součinitelů. Při hledání vlastních tvarů kmitání se následně řeší determinant [2] :

$$\left| -\mathbf{G}\mathbf{M} + \frac{1}{\lambda} \mathbf{I} \right| = 0 \quad (1.25)$$

Princip řešení tohoto determinantu bude uveden dále v textu při ukázce praktického výpočtu kritických otáček.

1.3.2 Krouživé kmitání a kritické otáčky

Během provozu hřídelí existují určité oblasti provozních otáček, kdy lze pozorovat jevy jako výrazné chvění v ložiscích, neklid mechanického chodu a prohýbání hřídele spojeno s možností vzniku trvalých deformací. Tyto oblasti provozních otáček nazýváme kritické a lze je chápat jako nestabilní případ rovnováhy mezi odstředivými a elastickými silami [2] .

Postup řešení a výsledné vztahy krouživého kmitání jsou formálně stejné jako při kmitání ohybovém. V takto idealizovaných úlohách existuje podobnost mezi kritickou úhlovou rychlostí ω_{krit} a vlastními tvary Ω_i ohybového kmitání. Také deformované tvary v okolí kritických otáček krouživého kmitání odpovídají vlastním tvarům při ohybovém kmitání [2] .

Pokud je hřídel osazena n kotouči, pak silový účinek každé hmoty lze nahradit setrvačnou silou od vlivu rotace působící na i -tý kotouč, $F_i = m_i \omega^2 y_i$. Kde y_i je průhyb hřídele v místě kotouče, který lze opět vyjádřit pomocí příčnickových součinitelů vztahem [2] :

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} m_j \omega^2 y_j \quad (1.26)$$

Chceme-li zvýšit přesnost a důvěryhodnost výpočtu, je dobré zohlednit fakt, že při uložení hřídele dojde vlivem deformace k natočení vlastních os rotace kotoučů. V důsledku toho kotouče za rotace hřídele konají sférický pohyb. Silové působení kotoučů na hřídel je pak složitější, jak plyne z teorie gyroskopů [2] .

V těžišti kotoučů zavedeme pravotočivý souřadný systém ξ , η , a ζ rotující kolem vlastní osy kotouče ζ . Odvozením pohybových rovnic kotoučů a následných deformací hřídele v jejich důsledku, lze získat vztahy (1.19) a (1.20) upravené [2] :

$$y_i = \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} m_j \Omega^2 y_j + \gamma_{ij} (I_{\eta j} \Omega^2 - I_{\xi j} \Omega \omega) \varphi_j) \quad (1.27)$$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n (\beta_{ij} m_j \Omega^2 y_j + \delta_{ij} (I_{\eta j} \Omega^2 - I_{\xi j} \Omega \omega) \varphi_j) \quad (1.28)$$

Kde výrazy $m_j \omega^2 y_j$ vyjadřují odstředivé síly kotoučů a výrazy $(I_{\eta j} - I_{\xi j}) \omega^2 \varphi_j$ vyjadřují moment od setrvačných sil kotoučů. Člen $(-I_{\xi j} \Omega \omega \varphi_j)$ v uvedených rovnicích je vztah pro gyroskopický moment a pro model tenkých kotoučů přibližně platí $I_{\xi j} \doteq 2 \cdot I_{\eta j}$ [2] .

V uvedených rovnicích Ω značí úhlovou rychlost rotace hřídele a ω je vlastní rotace kotouče.

Teoreticky mohou nastat dvě možnosti sférického pohybu

- a) Souběžná precese, kdy disk a hřídel rotují ve stejném smyslu $\Omega = \omega$, potom

$$M_j^G = -2I_{\eta j} \omega^2 \varphi_j \quad (1.29)$$

- b) Protiběžná precese, kdy disk a hřídel rotují v opačném smyslu $\Omega = -\omega$

$$M_j^G = 2I_{\eta j} \omega^2 \varphi_j \quad (1.30)$$

V praxi je častější případ souběžné precese [2] , [3] .

Soustavu rovnic, sestavenou z obecných vztahů (1.27) a (1.28), lze vyjádřit v maticovém tvaru [2] :

$$(-\omega^2 \mathbf{GM} + \mathbf{I}) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (1.31)$$

Kde $\mathbf{y}^T = [\dots, y_i, \varphi_i, \dots]$ je vektor výchylek a natočení v místě kotoučů. \mathbf{M} je diagonální matice hmotností kotoučů a jejich momentů setrvačnosti. Matice \mathbf{G} je symetrická matice složená z příčnickových součinitelů [2] .

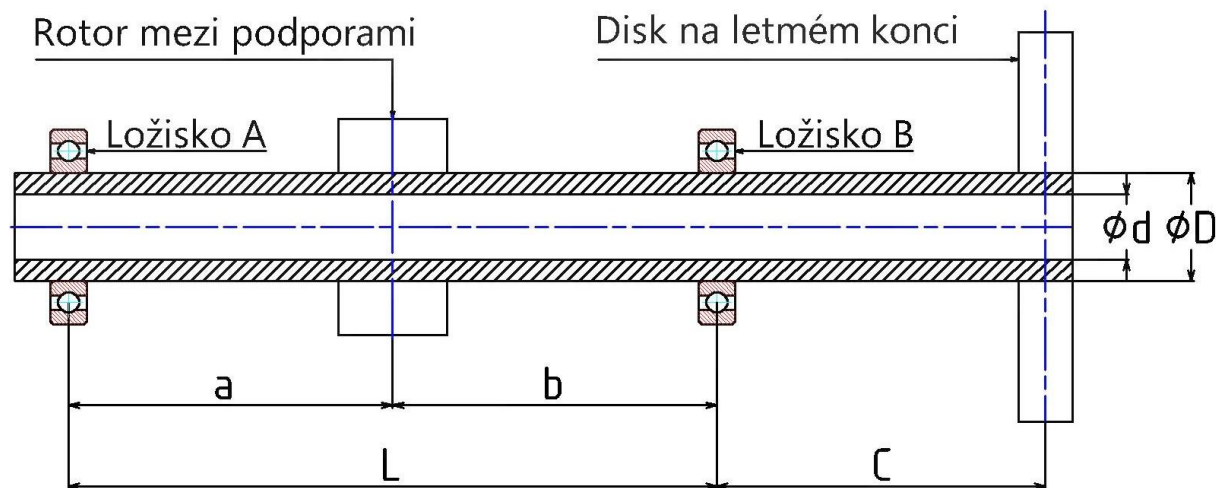
Řešením frekvenčního determinantu (1.32) získáme hodnoty kritických úhlových rychlostí. Postup jeho řešení bude uveden dále v textu [2] .

$$|-\omega^2 \mathbf{G} \mathbf{M} + \mathbf{I}| = 0 \quad (1.32)$$

Jak

2 Řešení namáhání hřídele

Hřídel v elektrických strojích bývá často vyrobena tak, že nese rotorové vinutí mezi ložisky (podporami) a další součásti na letmém konci jako například spojky, řemenice atd. Tyto součásti dodanou energii přenáší dále na mechanickou energii jiných součástí, a lze je přibližně modelovat jako disky, či kotouče.



Obr. 1 Schéma

2.1 Výpočtový model

Z obrázku Obr.1 je vidět, že hřídel je zatížena mezi podporami neseným rotorem o hmotnosti m_R . Dále lze v tomto místě uvažovat působíště vlastní tíhové síly části hřídele mezi podporami. Na letmém konci je hřídel zatížena hmotností neseného kotouče m_K , a pro zjednodušení lze zde situovat působíště tíhové síly od hmotnosti části hřídele na letmém konci.

Při navrhování hřídele je třeba brát zřetel na velikost průhybů vlivem deformací, a to zejména na letmém konci a mezi podporami. Dále je pak třeba dávat pozor na velikosti napětí v kritických místech, která jsou, s ohledem na maxima ohybového momentu mezi podporami a v ložisku B.

Velikost deformací lze ovlivnit změnou tuhosti hřídele samotné. Ta je dána geometrií tvaru hřídele. Hřídel má většinou plný příčný průřez. Nejjednodušším způsobem, jak ovlivnit tuhost hřídele se nabízí změna vnitřního průměru průřezu d a délka letmého konce C , kterou lze ovlivňovat ohybový moment od letmého konce.

Pokud ovšem do silového působení uvažujeme i vlastní tíhu hřídele, jak je zmíněno výše, změna geometrie bude mít vliv také na velikost tíhy hřídele na úsecích mezi podporami a na letmém konci.

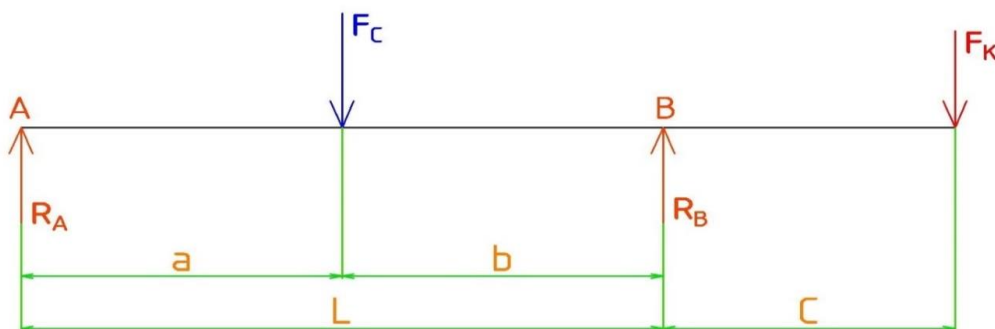
Pro velikosti sil F_C , mezi podporami, a F_K na letmém konci budou platit vztahy:

$$F_C(d, c) = m_R \cdot g + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot L \cdot \rho \cdot g \quad (2.1)$$

$$F_K(d, c) = m_K \cdot g + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot C \cdot \rho \cdot g \quad (2.2)$$

2.2 Řešení za klidu

Daná úloha je staticky určitá. Reakce v ložiscích A a B, lze tedy vypočítat z rovnic silové rovnováhy ve směru osy y a momentové rovnováhy k bodu A, kterým prochází osa z.



Obr. 2 Úplné uvolnění

Rovnice statické rovnováhy za klidu:

$$\sum F_y = 0: R_A + R_B - F_C - F_K = 0 \quad (2.3)$$

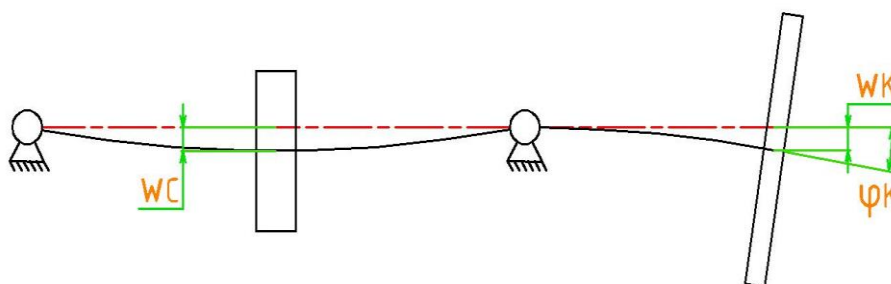
$$\sum M_Z^A = 0: -F_C \cdot a + R_B \cdot (a + b) - F_K \cdot (a + b + C) = 0 \quad (2.4)$$

Po úpravě získáme vztahy pro velikosti reakcí v ložiscích:

$$R_A = \frac{F_C \cdot b - F_K \cdot C}{a + b} \quad (2.5)$$

$$R_B = \frac{F_C \cdot a - F_K \cdot (a + b + C)}{a + b} \quad (2.6)$$

2.2.1 Průhyby za klidu



Obr. 3 Znázornění deformace

Pro výpočet průhybu hřídele při konkrétní konfiguraci uložení v ložiscích a nesených hmot je vhodné použití Castiglianovy věty. V tomto případě je nutné hřídel rozdělit na tři úseky o délkách a , b a c . Průběhy ohybového momentu vyjadřují následující vztahy:

$$M_O^I = R_A \cdot x_1; x_1 \in \langle 0; a \rangle \quad (2.7)$$

$$M_O^{II} = R_A \cdot (a + x_2) - F_C \cdot x_2; x_2 \in \langle 0; b \rangle \quad (2.8)$$

$$M_O^{III} = -F_K \cdot x_3; x_3 \in \langle 0; C \rangle \quad (2.9)$$

Castiglianova věta pro průhyb volného konce bude mít podle využití vztahu (1.8) následující tvar:

$$w_K = \int_0^a \frac{M_O^I}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^I}{\partial F_K} dx_1 + \int_0^b \frac{M_O^{II}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{II}}{\partial F_K} dx_2 + \int_0^c \frac{M_O^{III}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{III}}{\partial F_K} dx_3 \quad (2.10)$$

Po dosazení a úpravě platí:

$$w_K(d, C) = \frac{C \cdot (-3 \cdot a^2 \cdot F_K + (8 \cdot a \cdot c + 4 \cdot C^2) \cdot F_K)}{E \cdot J_z} \quad (2.11)$$

Kde J_z je kvadratický moment kruhového, popřípadě mezi kruhového průřezu, daného vztahem (2.12).

$$J_z = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} \quad (2.12)$$

Po úpravě vztahu (2.10) a zohlednění vlivu velikosti rozměrů d a C na průhyb letmého konce dostaneme tvar:

$$w_K(d, C) = \frac{64 \cdot C \cdot (-3 \cdot a^2 \cdot F_K(d, C) + (8 \cdot a \cdot C + 4 \cdot C^2) \cdot F_K(d, C))}{12 \cdot E \cdot \pi \cdot (D^4 - d^4)} \quad (2.13)$$

Pro průhyb mezi podporami bude platit podobný vztah jako (2.10), s tím rozdílem, že bude třeba parciálně derivovat dle síly F_C .

$$w_C = \int_0^a \frac{M_O^I}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^I}{\partial F_C} dx_1 + \int_0^b \frac{M_O^{II}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{II}}{\partial F_C} dx_2 + \int_0^c \frac{M_O^{III}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{III}}{\partial F_C} dx_3 \quad (2.14)$$

Po provedení stejných úprav jako v případě řešení letmého konce dostaneme rovnici pro w_C jako funkci d a c :

$$w_C(d, C) = \frac{64 \cdot b^2 \cdot (2 \cdot b \cdot F_C(d, C) - 3 \cdot C \cdot F_K(d, C))}{12 \cdot E \cdot \pi \cdot (D^4 - d^2)} \quad (2.15)$$

2.2.2 Napětí v kritických místech za klidu

S ohledem na mezní stav pružnosti se na hřídeli nacházejí dvě místa. Mezi podporami v působišti F_C a v ložisku B. V obou místech je třeba sledovat hodnoty napětí, aby nepřekročily hodnotu meze kluzu. Níže uvedeným způsobem lze však zjistit jen nominální hodnoty normálového napětí při ohybu. Hřídel bývá ve skutečnosti osazena. Zjištěné hodnoty je proto třeba dodatečně přepočítat tvarovým součinitelem α . Pro napětí v daných místech platí vztah (1.5):

Mezi podporami má tvar

$$\sigma_{MP} = \frac{M_O^I}{J_z} \cdot \frac{D}{2} = \frac{R_A \cdot a}{\pi(D^4 - d^4) \cdot 64^{-1}} \cdot \frac{D}{2} \quad (2.16)$$

Přičemž pro reakci v ložisku A platí vztah (2.5), potom pro napětí platí:

$$\sigma_{MP}(d, c) = (F_C(d, C) \cdot b - F_K(d, C) \cdot C) \cdot \frac{32 \cdot a \cdot D}{\pi \cdot L \cdot (D^4 - d^4)} \quad (2.17)$$

Kde pro hodnoty F_C a F_K platí stejné podmínky jako při vyhodnocování průhybu, dle rovnic (2.1) a (2.2).

Pro napětí v ložisku B má po úpravě vztah (1.5) na tvar (2.18) (2.2), kdy pro sílu F_K platí stále stejný předpoklad (2.2).

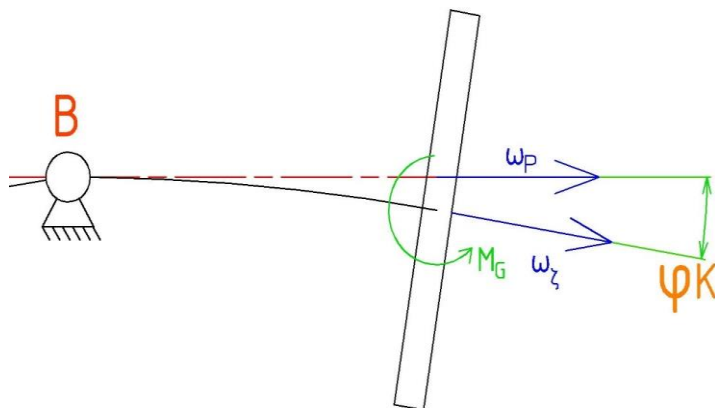
$$\sigma_B(d, c) = \frac{32 \cdot F_K(d, c) \cdot c}{\pi \cdot D \cdot (D^4 - d^4)} \quad (2.18)$$

2.3 Gyroskopický efekt na hřídeli

Z obrázku Obr. 3 je patrné, že kotouč na letném konci vlivem deformace, ve skutečnosti nerotuje okolo vodorovné spojnice svého středu se středem ložiska B. S ohledem na tento fakt, lze kotouč na letném konci chápat, jako setrvačnick se středem sférického pohybu v ložisku B.

V technické praxi hraje roli fakt, že hodnoty úhlů natočení střednice, vlivem deformace, jsou velmi malé. Potom jsou ovšem malé i uhly mezi ω a ω_ζ . Díky tomu lze teorii gyroskopu zjednodušit, a to, ztotožněním vlastní osy gyroskopu ζ s nositelkou vektoru momentu hybnosti ke středu sférického pohybu L_O .

Na hřídeli, lze nositelku unášivé úhlové rychlosti ω_P ztotožnit s nedeformovanou střednicí a relativní úhlovou rychlost ω_ζ s vlastní osou rotace kotouče, podle obrázku Obr. 4.



Obr. 4 Znárodnění gyroskopu na hřídeli

Unášivá a relativní úhlová rychlost svírají úhel φ_K , který lze vyjádřit z Castiglianovy věty pro natočení, zavedením doplňkového momentu na letném konci, pro který platí $M_D = 0$.

Reakce v ložiscích pak budou mít tvar:

$$R_A = \frac{F_C \cdot b - F_K \cdot c - M_D}{a + b} \quad (2.19)$$

$$R_B = \frac{F_C \cdot a - F_K \cdot (a + b + c) - M_D}{a + b} \quad (2.20)$$

Průběhy ohybových momentů na jednotlivých úsecích budu mít tvary:

$$M_O^I = R_A \cdot x_1; x_1 \in \langle 0; a \rangle \quad (2.21)$$

$$M_O^{II} = R_A \cdot (a + x_2) - F_C \cdot x_2; x_2 \in \langle 0; b \rangle \quad (2.22)$$

$$M_O^{III} = -F_K \cdot x_3 - M_D; x_3 \in \langle 0; c \rangle \quad (2.23)$$

Castiglianova věta pro natočení pak bude mít tvar:

$$\varphi_K = \int_0^a \frac{M_O^I}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^I}{\partial M_D} dx_1 + \int_0^b \frac{M_O^{II}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{II}}{\partial M_D} dx_2 + \int_0^c \frac{M_O^{III}}{EJ_z} \cdot \frac{\partial M_O^{III}}{\partial M_D} dx_3 \quad (2.24)$$

Takto vyjádřený úhel φ_K lze následně využít pro vyjádření gyroskopického momentu působícího na kotouč dle rovnice (1.18) vztahem (2.25), a to s ohledem na to že velikosti unášivé a relativní úhlové rychlosti jsou si rovny vztahem:

$$M^G = \omega_p^2 \cdot \mathbf{sin}(\varphi_K) \cdot I_\zeta \quad (2.25)$$

Kde I_ζ je moment setrvačnosti kotouče k vlastní ose rotace, ten ovšem v případě kotouče nasazeného na hřídeli nelze chápat, jako klasický moment setrvačnosti plného disku. V tomto případě je třeba od momentu plného kotouče, $I = \frac{1}{2} m_K \cdot r_K^2$, kde r_K je vnější poloměr neseného kotouče, odečíst moment setrvačnosti odebraného kotouče prostoru, který vyplňuje hřídel o průměru D . Potom pro kotouč platí vztah

$$I_K = \frac{1}{2} \left(m \cdot r_K^2 - m_O \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right) \quad (2.26)$$

Pokud ovšem zohledňujeme v modelu silového zatížení tíhovou sílu hřídele samotné, hodí se ji i zde zahrnout do výpočtu. Část hřídele na letmém konci ve skutečnosti rotuje spolu s diskem okolo vlastní osy rotace a má také svůj moment setrvačnosti. Daný úsek hřídele má tvar dutého, resp. plného, válce. Záleží, zda bude hřídel provrtaná, nebo ne. Pro moment setrvačnosti válcových těles platí stejný vztah jako pro disky, takže nezávisí přímo na výšce válce (zde délce letmého konce C), ale pouze na rozměrech příčného průřezu a vlastní hmotnosti válce, v té už ovšem délka letmého konce vystupovat bude.

Pro plný válec bude moment setrvačnosti I_{PV} vyjádřen vztahem (2.27), kde výraz v hranatých závorkách vyjadřuje hmotnost plného válce.

$$I_{PV} = \frac{1}{2} \cdot \left[\pi \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot \rho \cdot C \right] \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \quad (2.27)$$

Pokud bude ovšem hřídel provrtaná, je vyjádřit moment setrvačnosti odebrané hmoty I_{OV} vztahem (2.28), kde je tentokrát v hranatých závorkách hmotnost odebrané hmoty hřídele.

$$I_{OV} = \frac{1}{2} \cdot \left[\pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot \rho \cdot C \right] \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 \quad (2.28)$$

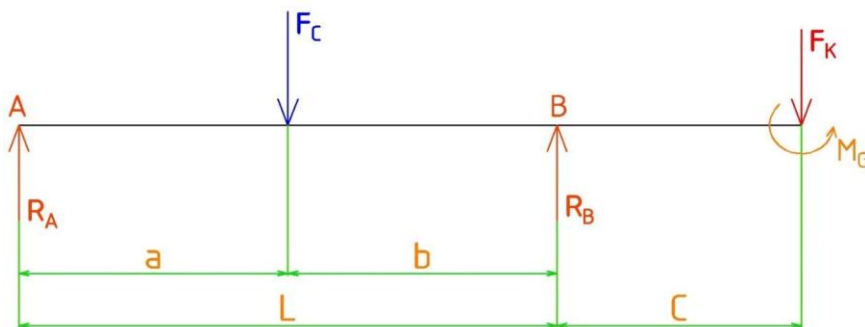
Výsledný moment setrvačnosti letmého konce I_C získáme vzájemným odečtením vztahů (2.27) a (2.28), kdy po úpravě platí:

$$I_C = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot C \cdot \left[\left(\frac{D}{2} \right)^4 - \left(\frac{d}{2} \right)^4 \right] \quad (2.29)$$

Gyroskopický moment, vzniklý při rotaci působí na hmotu, jejíž moment setrvačnosti je dán součtem vztahů (2.26) a (2.29).

2.4 Řešení za rotace

Gyroskopický moment vzniklý roztočením hřídele následně změní zatížení podle obrázku Obr. 5.



Obr. 5 Úplné uvolnění za rotace

Rovnice statické rovnováhy se změní oproti uložení za klidu následujícím způsobem:

$$\sum F_y = 0: R_A + R_B - F_C - F_K = 0 \quad (2.30)$$

$$\sum M_Z^A = 0: -F_C \cdot a + R_B \cdot (a + b) - F_K \cdot (a + b + c) + M_G = 0 \quad (2.31)$$

Reakce v ložiscích za rotace budou vyjádřeny rovnicemi:

$$R_A = \frac{F_C \cdot b - F_K \cdot c + M_G}{a + b} \quad (2.32)$$

$$R_B = \frac{F_C \cdot a - F_K \cdot (a + b + c) + M_G}{a + b} \quad (2.33)$$

Průběhy ohybových momentů na úsecích a , b a c budou mít tvar:

$$M_O^I = R_A \cdot x_1; x_1 \in \langle 0; a \rangle \quad (2.34)$$

$$M_O^{II} = R_A \cdot (a + x_2) - F_C \cdot x_2; x_2 \in \langle 0; b \rangle \quad (2.35)$$

$$M_O^{III} = -F_K \cdot x_3 + M_G; x_3 \in \langle 0; c \rangle \quad (2.36)$$

2.4.1 Průhyby za rotace

Výpočet průhybu mezi podporami a na letném konci bude stejný jako za klidu, obecné vztahy budou shodné jako (2.10) a (2.14). Ale výsledné vztahy se budou lišit právě o člen vyjadřující působení gyroskopického momentu. Po úpravách bude platit následující.

Pro průhyb letného konce:

$$w_K(d, C) = \frac{64 \cdot C \cdot (-3a^2 F_K(d, C) + (8ac + 4C^2) \cdot F_K(d, C) - (8a + 6c) \cdot M_G(d, C))}{12E\pi \cdot (D^4 - d^4)} \quad (2.37)$$

Pro průhyb mezi podporami:

$$w_C(d, C) = \frac{64 \cdot b^2 \cdot (2b \cdot F_C(d, C) - 3C \cdot F_K(d, C) + 3 \cdot M_G)}{12E\pi \cdot (D^4 - d^2)} \quad (2.38)$$

2.4.2 Napětí v kritických místech za rotace

Po roztočení hřídele se nezmění kritická místa, stále bude třeba sledovat napětí mezi podporami a v místě ložiska B.

Pro místo mezi podporami bude platit stejný obecný vztah (2.16) jako za klidu, ovšem po zohlednění změny zatížení bude pro rovnici reakce v ložisku A platit vztah (2.32). Za rotace tak dojde ke změně vstupního momentu, který zohlední působení gyroskopického momentu. Vztah pro napětí bude mít tvar:

$$\sigma_{MP}(d, C) = (F_C(d, C) \cdot b - F_K(d, C) \cdot C + M_G(d, C)) \cdot \frac{32aD}{\pi l(D^4 - d^4)} \quad (2.39)$$

Pro místo v ložisku B bude situace obdobná vstupní ohybový moment bude také ovlivněn gyroskopickým momentem, a pro napětí tak bude platit vztah:

$$\sigma_B(d, C) = \frac{32 \cdot (F_K(d, C) \cdot C - M_G(d, C))}{\pi \cdot D \cdot (D^4 - d^4)} \quad (2.40)$$

2.5 Výpočet kritických otáček

Pro výpočet kritických otáček třeba sestavit soustavu rovnic pro průhyby a natočení dle vztahů (1.27) a (1.28) pro daný model. V případě řešené hřídele dle obrázku Obr. 1, se jedná o hřídel se 2 hmotami. Jelikož rotor mezi podporami uvažujeme jako koncentrovanou hmotu, označovanou indexem 1, tak pro ni je třeba sestavit pouze rovnici (1.27) pro deformační posuvy, beze vztahu pro natočení. Hmotu představující kotouč letmého konce je označována indexem 2. Pro tenké kotouče přibližně platí již kapitole 1 zmíněný vztah $I_{\xi i} \doteq 2 \cdot I_{\eta j}$, kde $j = 2$.

2.5.1 Sestavení matice pro kritické otáčky

Soustava rovnic sestavená podle zmíněných předpokladů bude vypadat následovně:

$$y_1 = \alpha_{11}m_1y_1\omega^2 + \alpha_{12}m_2y_2\omega^2 + \gamma_{12}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 \quad (2.41)$$

$$y_2 = \alpha_{21}m_1y_1\omega^2 + \alpha_{22}m_2y_2\omega^2 + \gamma_{22}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 \quad (2.42)$$

$$\varphi_2 = \beta_{21}m_1y_1\omega^2 + \beta_{22}m_2y_2\omega^2 + \delta_{22}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 \quad (2.43)$$

Tuto soustavu je třeba převést do maticového tvaru (1.31), popřípadě lze přímo uvést frekvenční determinant (1.32). Ten je pro přehlednost uveden na následující straně.

Při výpočtu kritické frekvence lze uvažovat dva případy, a to jedná-li se o hřídel hmotnou, nebo nehmotnou. Pokud uvažujeme nehmotnou hřídel, pak m_I odpovídá hmotnosti pouze rotoru m_R , hmotnost m_2 odpovídá hmotnosti kotouče m_K a moment setrvačnosti $I_{\xi 2}$ momentu setrvačnosti kotouče I_K . Je-li hřídel chápána jako hmotná je třeba předchozí veličiny vyjádřit i s ohledem na vlastní hmotu hřídele. Podobně jako ve vztazích (2.1) a (2.2) pro hmotnosti a moment setrvačnosti tak jak bylo vysvětleno v kapitole Gyroskopický efekt na hřídeli. Názornější vysvětlení je uvedeno dále v textu v kapitole Konkrétní hodnoty a číselné výsledky.

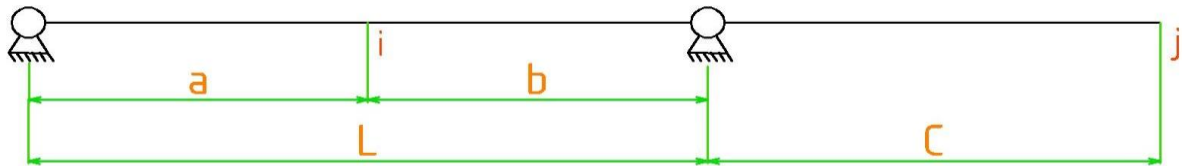
Takto sestavený determinant, ve vztahu (2.44), představuje konkrétní vyjádření vztahu (1.32), pro řešený případ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}m_1y_1\omega^2 - 1 & \alpha_{12}m_2y_2\omega^2 & \gamma_{12}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 \\ \alpha_{21}m_1y_1\omega^2 & \alpha_{22}m_2y_2\omega^2 - 1 & \gamma_{22}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 \\ \beta_{21}m_1y_1\omega^2 & \beta_{22}m_2y_2\omega^2 & \delta_{22}\left(-\frac{1}{2}I_{\xi 2}\right)\varphi_2\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

Princip nalezení kořenů tohoto determinantu bude uveden a vysvětlen dále v textu.

2.5.2 Využití příčnickových součinitelů

Členy α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} , δ_{ij} představují příčnickové součinitele popsané v kapitole 1. Konkrétně pro případ hřídele s hmotou mezi podporami a na letném konci, dle obrázku Obr. 6 budou mít následující tvary [2] [3] .



Obr. 6 Kóty pro příčnickové součinitele

Pro průhyb hřídele od jednotkové síly (nosníku)

$$\alpha_{11} = \frac{a^3 \cdot b^3}{3EJL} \quad (2.45)$$

$$\alpha_{12} = -\frac{a \cdot C}{6EJL} \cdot (L^2 - a^2) \quad (2.46)$$

$$\alpha_{22} = \frac{C^2 \cdot (L + C)}{3EJ} \quad (2.47)$$

Pro pootočení nosíku od jednotkového síly

$$\beta_{21} = \frac{C}{6EJL} \cdot (L^2 - 3a^2) \quad (2.48)$$

$$\beta_{22} = \frac{C \cdot (2L + 3C)}{6EJ} \quad (2.49)$$

Pro průhyb nosníku od jednotkového momentu

$$\gamma_{12} = \frac{-a \cdot (L^2 - a^2)}{6EJL} \quad (2.50)$$

$$\gamma_{22} = \frac{C \cdot (2L + 3C)}{6EJ} \quad (2.51)$$

Pro pootočení nosíku od jednotkového momentu

$$\delta_{22} = \frac{L + 3C}{3EJ} \quad (2.52)$$

2.5.3 Nalezení řešení kritických otáček

Kritické otáčky jsou takové hodnoty úhlových rychlostí ω , při kterých je splněn vztah (2.44), tedy determinant musí být roven nule. Řešení singularit matic o rozměrech větších než 2×2 vede na polynomy vyšších stupňů. Nalezení jejich kořenů analyticky je složité, někdy i nemožné. Proto se pro řešení tohoto problému využívá numerické metody půlení intervalů. Metoda má pro svou jednoduchost využití ve výpočtové praxi při softwarovém řešení tohoto úkolu, což bude vysvětleno v následující kapitole.

3 Návrh kalkulátoru pro využití hřídele v elektrickém stroji

Podle vztahů pro průhyb hřídele za klidu (2.13) a (2.15), respektive za rotace (2.37) a (2.38), je vidět, že deformace lze ovlivnit změnou tuhosti ohybu. Jednou z možností, jak toto provést, je změna vlastností příčného průřezu. A to změnou vnitřního průměru d . Pro usnadnění práce při konstrukčním návrhu takového hřídele je výhodné, celý dosud uvedený výpočtový postup algoritmizovat. Všechny dosud uvedené vztahy a nastíněné problémy tak lze vyřešit rychleji pomocí PC softwaru vytvořením jednoduchého kalkulátoru.

3.1 Software pro návrh aplikací

Pro tvorbu kalkulátoru byl vybrán software Matlab. Tento počítačový program sice není klasickým nástrojem softwarových programátorů, nabízí ovšem široké možnosti řešení nejrůznějších matematických operací a také interpretací jimi dosažených výsledků. Díky své struktuře kódovacího jazyka je snáze použitelný pro uživatele bez velkých zkušeností při psaní počítačových skriptů.

3.2 Kalkulátor Dutý Hřídel

Základní menu kalkulátoru je zobrazeno na obrázku Obr. 7.

Figure 1: Dutý Hřídel

Parametry hřídele

Rotor mezi podporami Disk na letmém konci

Ložisko A Ložisko B

a b c L

Vnější průměr D [mm] Vzdálenost ložisek L [mm] Maximální délka letmého konce C [mm]

Hmotnost kotouče m_k [kg] Moment setrvačnosti kotouče I_k [kg·m²] Hmotnost rotoru m_r [kg]

Provozní otáčky n [ot/min] Dovolенý průhyb mezi podporami [mm]

Materiál

Modul pružnosti E [GPa] Hustota materiálu [kg/m³]

Mez kluzu R_e [MPa] Koefficient bezpečnosti k MSP

Grafické průběhy

Průhyby letmého konce

Průhyby mezi podporami

Napětí mezi podporami

Napětí v místě B

Číselné výsledky

Hodnoty za klidu

Reakce ložisko A [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Průhyb letmý konec [mm]
Reakce ložisko B [N]	Napětí v ložisku B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]

Hodnoty za rotace

Reakce ložisko A [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Průhyb letmý konec [mm]	První kritická rychlost nehmotná hřídel [ot/min]
Reakce ložisko B [N]	Napětí v ložisku B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	První kritická rychlost hmotná hřídel [ot/min]

Konkrétní hodnoty

Požadovaný vnitřní průměr d [mm]

Délka letmého konce C [mm]

Výpočet

Princip výpočtu je takový, že se jedná o algoritmizaci celého výpočtu řešeného v druhé kapitole. Průběh výpočtu a interpretace výsledků má stejný sled jako postup v kapitole Řešení namáhání hřídele. Vždy nejdříve probíhá analýza stavu za klidu a poté porovnání se stav za rotace hřídele.

3.2.1 Požadavky na vstupní hodnoty

Princip práce s programem je následující. V sekci *Parametry hřídele* jsou kolonky pro požadavky na vstupní hodnoty, potřebných pro dané výpočty. Z hlediska geometrie hřídele jsou požadovány parametry: vnější průměr hřídele D , vzdálenost mezi ložisky L a vzdálenost kotouče na letmém konci C . Pro určení silového zatížení je důležité znát hmotnosti neseného kotouče na letmém konci m_K a hmotnost neseného rotoru m_R . Tyto parametry jsou důležité pro výpočet deformací za klidu.

Pro přechod do stavu za rotace je třeba, aby v programu proběhl výpočet úhlu natočení ϕ . Ten udává odklon vlastní osy rotace disku letmého konce od osy precesní úhlové rychlosti. K určení úhlové rychlosti je tím pádem nutné zadat hodnotu provozních otáček, s nimiž se počítá při provozu řešené hřídele. Dále potřeba zadat požadavek na vlastní moment setrvačnosti kotouče I_K . Jeho přesný tvar může být různý. Proto v rámci větší přesnosti výpočtu není vhodné snažit se jej dopočítat jako moment setrvačnosti disku nebo tenkého válce a je proto dobré znát pro zadání jeho přesnou hodnotu.

Podle toho, z jakého materiálu přesně je hřídel vyrobena, se mohou lišit hodnoty materiálových charakteristik. Požadavek hustoty je potřebný z důvodu výpočtu tíhových sil působících na části hřídele mezi ložisky a na letmém konci. Jak bylo vysvětleno dříve v kapitole Výpočtový model. Ve výpočtech deformací podle Castiglianovy věty figuruje hodnoty hodnota modulu pružnosti v tahu E , proto je také vhodné jeho hodnotu zadat přesně.

Při návrhu stroje je potřeba dbát na bezpečnost. Proto je nutné znát hodnoty veličin, díky nimž, lze posoudit samotnou bezpečnost stroje. Hodnoty meze kluzu Re a koeficientu bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti k , slouží k vyhodnocení toho, aby ve stroji mezní stav pružnosti nenastal. Aby bylo možné posoudit, zda ve stroji dojde, vlivem deformací, k vymezení vůle mezi rotorem a statorem je vhodné pro porovnání znát hodnotu tzv. dovoleného průhybu. Pracování s tímto údajem ale muselo být ze osobní zkušenosti upraveno, jak je popsáno při interpretaci dat v kapitole Průhyby mezi podpory

3.2.2 Grafické závislosti

Se zadanými vstupními parametry lze pracovat nejdříve tak, aby se uživatel podíval, jak se budou chovat deformace a průběhy napětí v kritických místech. Princip vyhodnocení průběhů těchto veličin je následující. Program vyhodnocuje vztahy pro napětí a deformace jako funkce dvou proměnných, délky letmého konce C a hodnoty vnitřního průměru d . Tyto proměnné nabývají hodnot od nuly až po maximální požadované, což jsou zadané hodnoty C a D . Vyhodnocení hodnot proběhne vždy dvakrát pro jednu veličinu, a to pro klidový stav a stav zatížení za rotace, při působení vlivu gyroskopického efektu. Pro názornost je zde uveden kousek výpočtového kódu programu. Konkrétně je uveden způsob výpočtu natočení letmého konce.

```
d=[0:D]';
c=[0:C];
% natočení letmého konce
for i=1:length(d)
    for j=1:length(c)
        uk(i,j)=((64)/(12*E*10^9*pi*((D*10^-3)^4-(d(i,1)*10^-3)^4)))*...
            (3*(a*10^3)^2*(mr*g+ro*g*0.25*(D^2*d(i,1)^2)*L*10^9)+(8*(a
            *10^-3)*(c(1,j)*10^-3)+6*((c(1,j)*10^-
            3)^2)*(mk*g+ro*g*0.25*(D^2-d(i,1)^2)*c(1,j)*10^-9));
    end
end
```

Ukázka uvádí výpočet vztahu (2.24) pro výpočet natočení. Ze vstupních hodnot C a D jsou vytvořeny vektory pro matici, sloužící k ukládání hodnot natočení pro všechny možné kombinace. Na stejném principu funguje vyhodnocování i ostatních veličin pro grafické průběhy.

Následně dojde ke zobrazení celé plochy grafické závislosti. Tyto průběhy jsou vhodné spíš jako orientační pro to, aby si uživatel získal představu, jak se hodnoty dané veličiny mění.

Uživatelsky přívětivější je zobrazení rovinného grafu. K tomu lze využít právě požadované kritériální hodnoty dovoleného průhybu a meze kluzu s koeficientem bezpečnosti. V Matlabu je možné zobrazit graf dvou proměnných tak, že matici funkčních hodnot pomyslně seřídíme při konkrétní požadované funkční hodnotě. Následně dojde ke zobrazení jedné vrstevnice grafu, odpovídající danému kritériu.

3.2.3 Konkrétní hodnoty a číselné výsledky

Když si uživatel díky grafickým průběhům udělá představu, jakých hodnot mohou dané veličiny nabývat, nabízí se mu možnost, zjistit konkrétní číselné výsledky. K tomu je třeba zadat hodnoty vnitřního průměru d a vzdálenosti letného konce C . Při odezvě na tlačítko Vypočítat, proběhnou podobné výpočty, jako při vyhodnocování grafů. Ovšem budou se lišit tím, že se nebude vyhodnocovat matice funkčních hodnot, ale vyjdou přímo číselné výsledky. Ty jsou rozděleny do dvou sekcí podle toho, zda se jedná o klidový stav nebo rotaci, kdy je opět ve výpočtu zohledněn vliv gyroskopického momentu. Navíc lze v číselných výsledcích pro porovnání zjistit také velikosti reakcí v ložiscích. Ty jsou totiž při konstrukčním návrhu také důležité, ovšem pro grafické zobrazení jejich průběhů, tak jako pro napětí, či průhyby nejsou kritéria tak jednoznačně vyjádřitelná, přesnou hodnotou.

Posledním údajem, který je vypočítán, je hodnota první kritické úhlové rychlosti. Údaj je pro provoz rotujících strojů důležité znát, aby se náhodou provozní otáčky neblížily těm kritickým a nedošlo tak k rezonanci hřídele, popřípadě celé soustavy. Navíc je zde možné udělat srovnání mezi uvažováním hmotné a nehmotné hřídele. Výpočet je v obou případech stejný, vždy se jedná o vyhodnocování singularity determinantu (2.44). Liší se pouze

Softwarové řešení se konkrétně zde velmi hodí, jak bylo nastíněno v kapitole Výpočet kritických otáček. Analytické řešení determinantů vyšších řádů bývá často komplikované. Proto zde bylo užito numerické metody půlení intervalu. Princip této metody je poměrně jednoduchý. Spočívá ve vyhodnocování hodnot determinantu uvedeného vztahem (2.44) dosazováním hodnot za úhlovou rychlost. Hodnoty jsou porovnávány s ohledem na znaménko, pokud se dvě po sobě následující hodnoty liší znaménkem, pak skutečný kořen leží mezi dvěma posledními posuzovanými hodnotami. Tato hodnota je hledanou první kritickou rychlostí. Ukázka výpočtu kódu pro výpočet kritických otáček je uvedena níže. Pro názornost je uveden pouze výpočet pro uvažování nehmotné hřídele. Při výpočtu hmotné hřídele by místo m_R , m_K , vztahy (3.1) a (3.2), zohledňující vlastní tíhu hřídele a pro moment setrvačnosti bude platit vztah (3.3), vyjádřený podle vysvětlení v kapitole Gyroskopický efekt na hřídeli.

$$m_1 = m_R + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot L \cdot \rho \quad (3.1)$$

$$m_2 = m_K + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \cdot C \cdot \rho \quad (3.2)$$

$$I = I_K + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot C \cdot \left[\left(\frac{D}{2} \right)^4 - \left(\frac{d}{2} \right)^4 \right] \quad (3.3)$$

```

% Výpočet kritických otáček
% zavedení příčnickových součinitelů
a11=(a^3*b^3) / (3*Ep*J*L);
a12=(a*c*(a^2-L^2)) / (6*Ep*L*J); a21=a12;
a22=(c^2*(L+c)) / (3*Ep*J);

b11=(a^2*b^2*(a-b)) / (2*L^3*Ep*J);
b12=(c*(L^2-3*a^2)) / (6*Ep*L*J); b21=b12;
b22=(c*(2*L+3*c)) / (6*Ep*J);

g11=b11;
g12=(a*(a^2-L^2)) / (6*Ep*J*L); g21=g12;
g22=(c*(2*L+3*c)) / (6*Ep*J);

d11=(a*b*(a^3+b^3)) / (L^4*Ep*J);
d12=(3*a^2-L^2) / (6*Ep*L*J); d21=d12;
d22=(L+3*c) / (3*Ep*J);
% definice vektoru úhlové rychlosti pro vyšetření na niž je výpočet proveden
w = (1:10:200000);
% matice pro kritické otáčky, vektor determinantu matice
for iw=1: length(w)
    detw(iw)=det([
(a11*mr*(w(iw))^2)-1, a12*mk*(w(iw))^2, (-g12)*0.5*I*(w(iw))^2;...
a21*mr*(w(iw))^2, (a22*mk*(w(iw))^2)-1, (-g22)*0.5*I*(w(iw))^2;...
b21*mr*(w(iw))^2, b22*mk*(w(iw))^2, ((-d22)*0.5*I*(w(iw))^2)-1]);
end
zavedení veličiny kritické úhlové rychlosti
wkrit=inf;

% metoda půlení intervalu
for o=1:length (detw)-1
    if (detw(o) < 0 && detw(o+1)>0) || (detw(o)>0 & detw(o+1)<0)
        break
    end
    ak=w(o); bk=w(o+1);
    wkrit=((ak+bk) / 2);
    wkrit=(wkrit*60) / (2*pi);
end

```

Princip výpočtu je takový, že daný cyklus for vyhodnocuje rozdílnost dvou po sobě jdoucích hodnot determinantu matice. Jakmile je nalezeno vyhodnocování se zastaví. Následně je určena hodnota kritické rychlosti jako průměr hodnot, mezi nimiž rozdíl ve znaménku nastal. Tento způsob výpočtu je zjednodušen o vyhodnocování přesnosti řešení. Přesnost výpočtu lze v tomto případě ovlivnit dostatečně jemnou vzorkovací frekvencí vyhodnocování. Perioda vyhodnocovaných hodnot musí být výrazně vyšší, než bývá reálný rozdíl mezi kritickými a provozními otáčkami, aby se předešlo náchylnosti hřídele k rezonanci.

4 Získaná data a jejich analýza

Tato kapitola se věnuje názorné ukázce toho, jak kalkulátor vyhodnocuje vstupní data. Slouží také k vytvoření lepší představy o tom, jak se s programem pracuje a jak je možné chápat výsledná data. Částečně přibližuje také osobní zkušenosti při navrhování programu a odůvodňuje nutnost provést změny interpretace některých dat.

Jako příklad byla zadána data uvedená v následující tabulce.

D [mm]	L [mm]	C [mm]	mk [kg]	Ik [kg·m ²]	mr [kg]	n [min ⁻¹]	Dov. Průh.	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	Re [MPa]	k
300	2000	1000	25	35	40	2500	0,03	210	7850	320	1.5

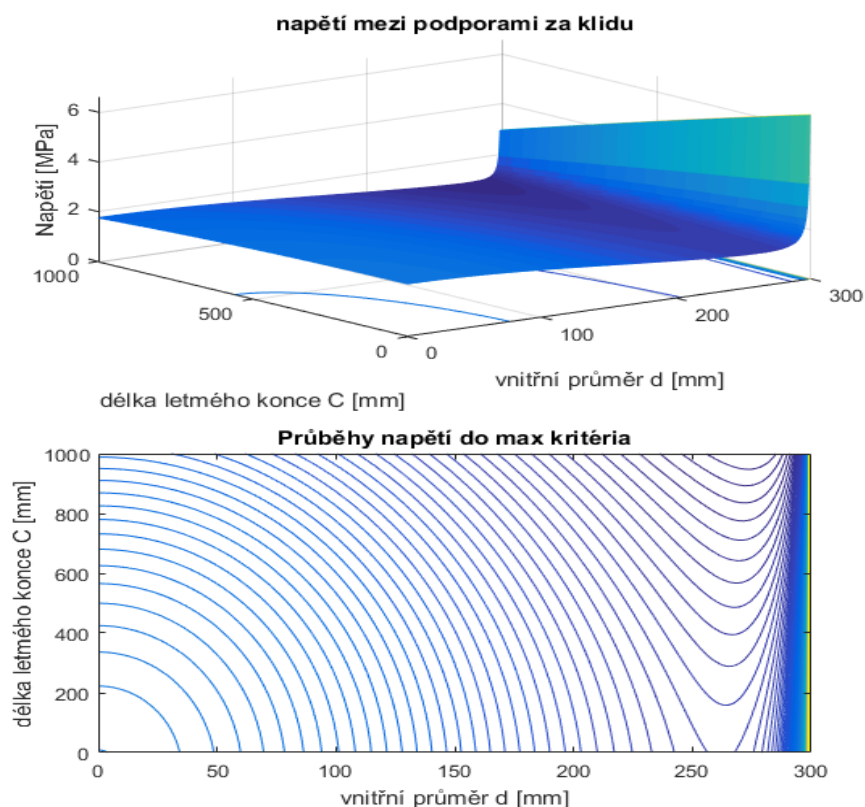
Tabulka 1 Vstupní hodnoty pro grafické zobrazení

4.1 Průběhy mezi podporami

Jako první budou vyhodnoceny průběhy napětí a průhybu mezi podporami jako funkce vnitřního průměru d a vzdálenosti C

4.1.1 Napětí mezi podporami

Pokud se nechají vykreslit průběhy napětí mezi podporami, tak za klidu lze vidět následující chování napětí v závislosti na změně vnitřního průměru a délce letmého konce.

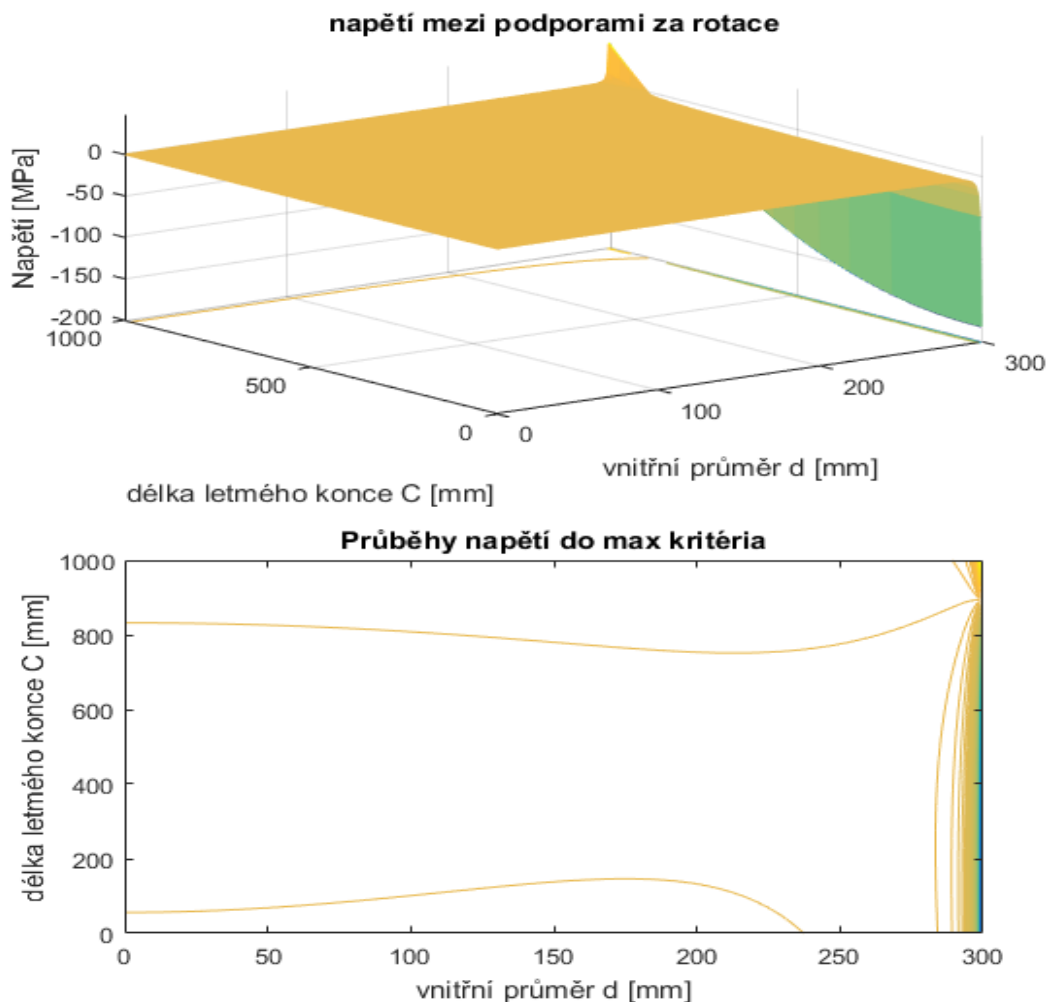


Obr. 8 Průběh závislosti napětí mezi podporami za klidu

Z průběhu je vidět jaký vliv má na napětí velikost vnitřního průměru. S rostoucím průměrem napětí do určité hodnoty klesá, až po překročení určité hodnoty začne značně narůstat a blížit

se asymptoticky nekonečnu. Program pro možnost porovnání situace ihned vykresluje také průběh veličiny za rotace. Ty jsou pro přehlednost uvedeny na následující straně.

Z obrázku Obr. 9 je vidět jaký vliv na průběh napětí může mít zohlednění vlivu vzniku gyroskopického účinku na letmém konci.

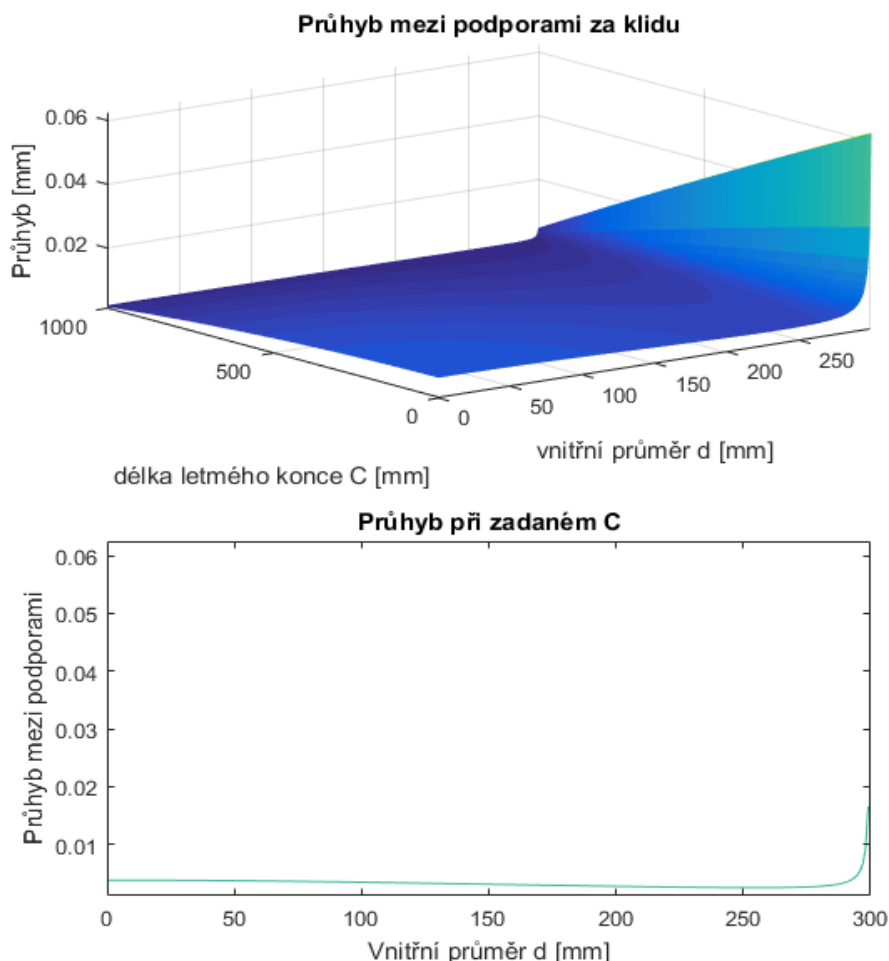


Obr. 9 Průběh závislosti napětí mezi podporami za rotace

Na první pohled jsou patrné dvě věci, tou první je viditelné snížení hodnot napětí na většině rozsahu daného velikostmi d a C . Druhou skutečností patrnou z průběhu je ve srovnání s prvním obrázkem přechod hodnot do záporné oblasti. U veličiny jako je napětí to znamená ten fakt, že v extrémních případech, hodnot vnitřního průměru, kdy se hřídel začíná podobat tenkostěnnému válci, dojde k přetočení tvaru hřídele vlivem deformace na druhou stranu. Potom místa, která by se za klidového uložení byla namáhána tahem, budou po roztočení namáhána tlakovým zatížením.

4.1.2 Průhyby mezi podporami

Vykreslení chování průhybu mezi podporami je založeno na podobném principu jako vykreslování napětí. Pro názornou ukázkou je na následujícím obrázku vykreslen průběh průhybu za klidu.



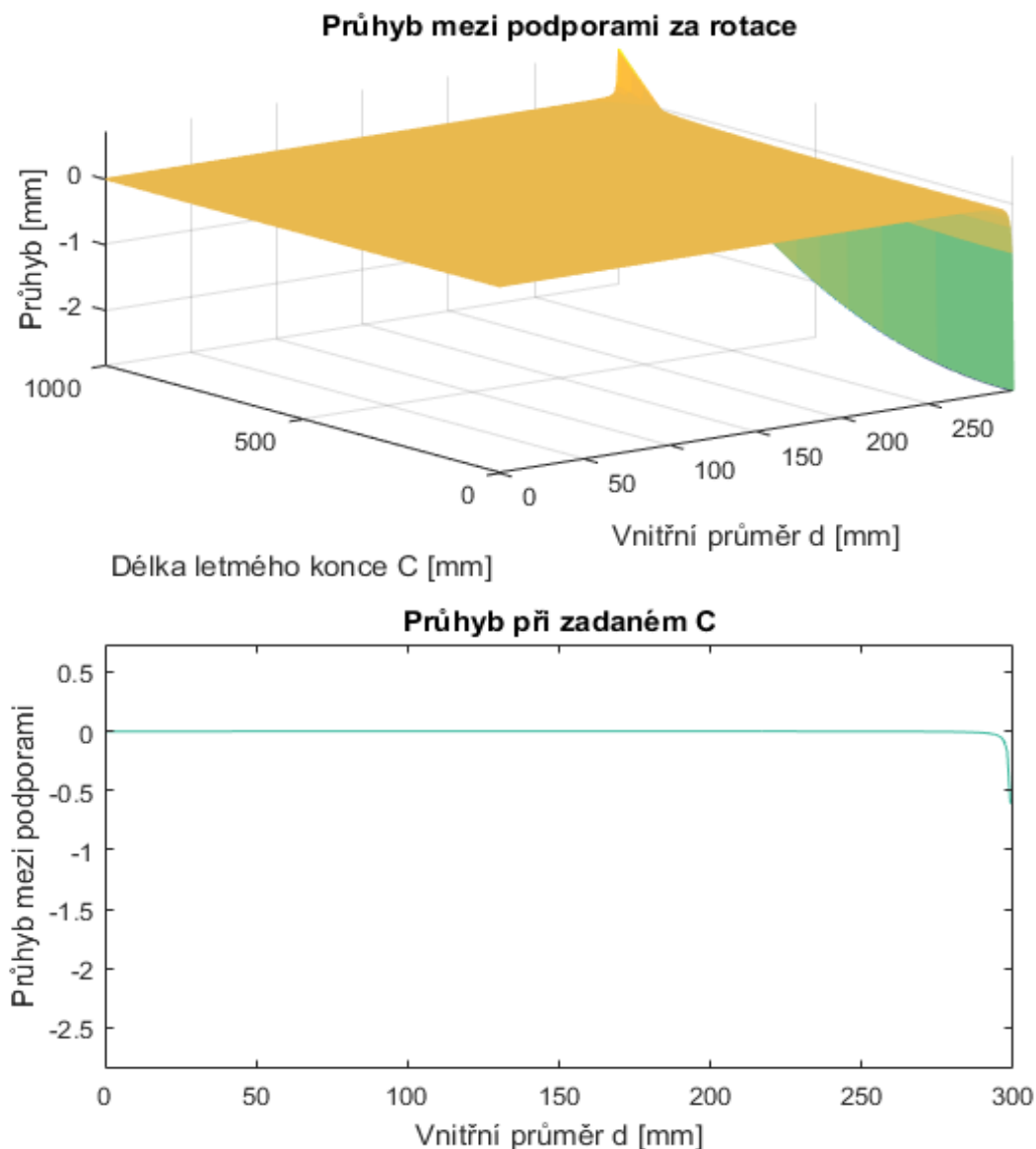
Obr. 10 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za klidu

Z grafického znázornění celkového průběhu průhybu je patrné, že průhyb se chová nepatrně jinak než napětí. Pokles výsledné hodnoty s rostoucím vnitřním průměrem sice klesá, ale ne tak výrazně jako napětí. Při osobní zkoušce programu zde byla provedena změna ohledně interpretace poskytnutých výsledných dat. Při seříznutí konkrétní hodnotou dovoleného průhybu se často stávalo, v důsledku relativně stabilního charakteru průběhu plochy v závislosti na c a d , že jako výsledek konturovaného grafu byl zobrazen pouhý bod, popřípadě velmi malá, často nepatrná křivka. Z tohoto důvodu je následně vykreslen graf, který vznikne seříznutím plochy dvou proměnných, při konkrétní hodnotě vzdálenosti letmého konce c . Konkrétně při tomto vyobrazení byla použita hodnota $C=800\text{ mm}$.

Z celkového průběhu je vidět že opět růst hodnoty celkového průhybu k nekonečnu s rostoucím vnitřním průměrem. Zajímavé je ovšem i chování s ohledem na délku letmého konce C . Ve směru této osy mají hodnoty tendenci klesat. To v celku odpovídá intuitivní představě takové,

že čím větší bude mít síla F_K , zatěžující letmý konec, rameno C tím snáz bude střed mezi podporami narovnávan.

Následující grafy ukazují změnu průběhu průhybu mezi podporami po roztočení hřídele.

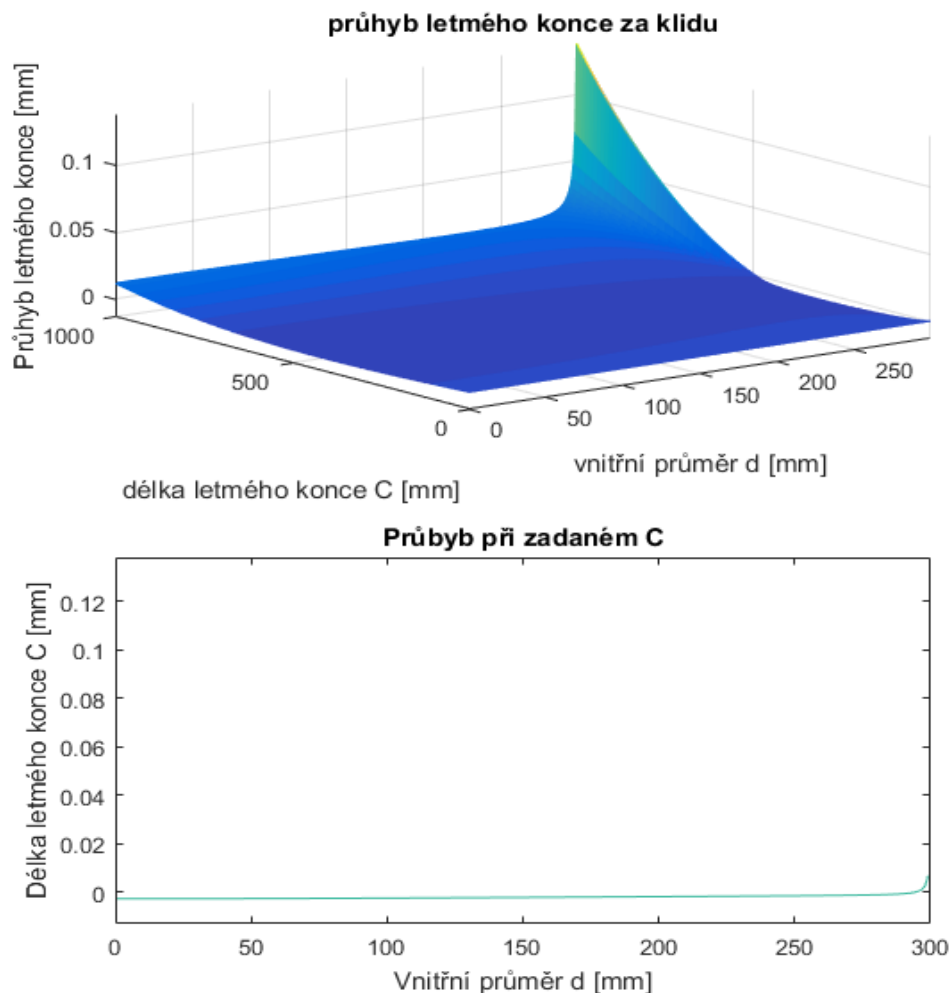


Obr. 11 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za rotace

Jak je znázorněno na grafech obrázku Obr. 11, vliv rotace hřídele na průhyb je celkem výrazný. Hodnoty se pohybují vcelku blízko nulové hodnotě. Pro lepší představu je zde opět uveden průběh změny průhybu i při konkrétní hodnotě $C=800 \text{ mm}$. Z obou výše uvedených grafů je vidět zaprvé tendence vlivu gyroskopického momentu při většině kombinací rozměrů C a d hřídel narovnat. A zadruhé je zde podobně jako u napětí patrná možnost, že se hřídel při limitních případech vnitřního průměru prohne na opačnou stranu. Což podporuje domněnky z analyzovaných průběhů napětí v tomto místě.

4.2 Průhyby na letmém konci

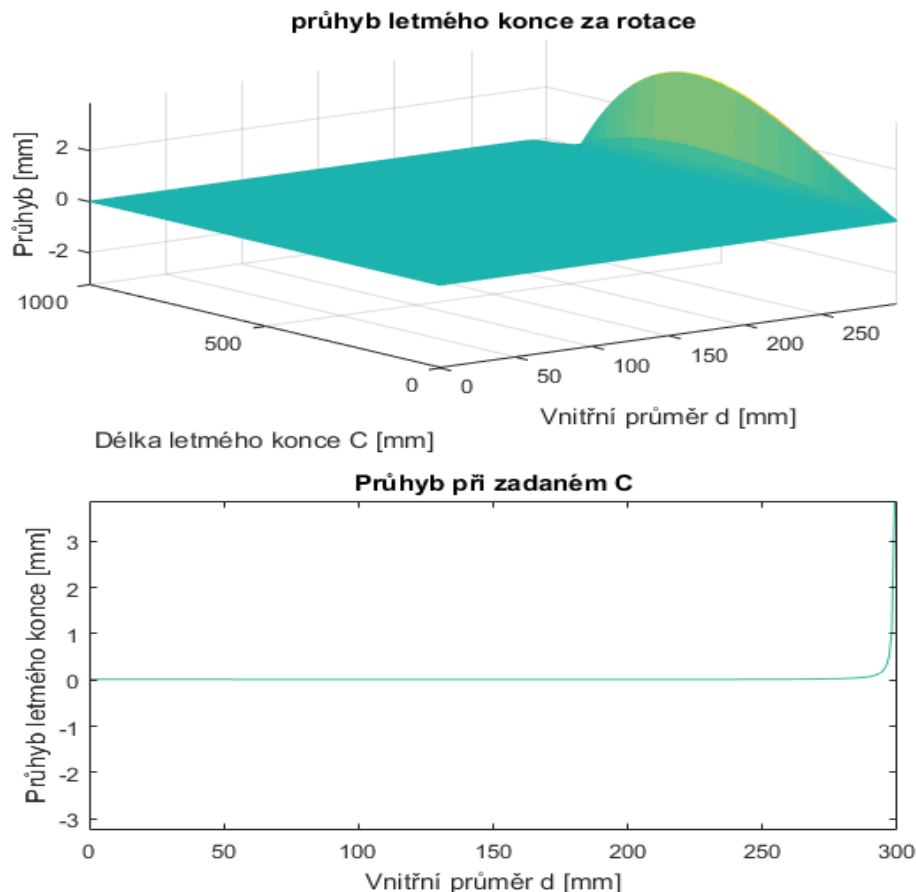
Kalkulátor umožňuje podobným způsobem rozebrat data o deformaci samotného letmého konce. Následující obrázek opět ilustruje chování průhybu neroztočené hřídele.



Obr. 12 Průběh závislosti průhybu letmého konce za klidu

Z průběhu je vidět, co může při určitých kombinacích nastat. Nastává zde podobný efekt jako při deformaci mezi podporami. A to ten, že záporná hodnota průhybu říká, že hřídel se při určitých kombinacích silového zatížení na volném konci prohne směrem nahoru, oproti původnímu předpokladu, z obecného odvození.

Při pohledu na průběhy dané závislosti opět za rotace, jsou viditelné opět podobné jevy jako byly popsány výše. Gyroskopický moment ovlivní průhyb, tak že jej přiblíží nule a při určitých hodnotách proměnných dojde k průhybu konce na druhou stranu. Přičemž vliv velikosti vnitřního průměru je zde opět výraznější, než velikost letmého konce C. Obrázek je pro přehlednost umístěn na následující straně.



Obr. 13 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za rotace

4.3 Analýza dosažených výsledků

Umět vykreslit grafické průběhy je dobrá pomůcka, pro získání představy o tom, jak se asi hřídel bude chovat. Pokud ale chceme zjistit přesné výsledky, je lepší nechat si vypisovat konkrétní hodnoty. Jako příklad je opět uvedena tabulka se vstupními hodnotami, při kterých chceme znát výsledky. Zde oproti grafickým výsledkům potřebujeme také už konkrétní hodnoty vnitřního průměru a vzdálenosti letmého konce. Jako první příklad byly použity hodnoty dle tabulky.

D [mm]	L [mm]	C [mm]	mk [kg]	Ik [kg·m ²]	mr [kg]	n [min ⁻¹]	Dov. průh.	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	Re [MPa]	k
300	2000	1000	25	35	40	2500	0,03	210	7850	320	1.5
Konkrétní hodnoty											
d [mm]	C [mm]										
150	550										

Tabulka 2 Vstupní hodnoty pro číselné výsledky

Jak bylo naznačeno dříve výpočet běží na podobném principu jako vyhodnocování grafických výsledků, ale v tomto případě už zná konkrétní hodnoty C , d a ukazuje přímo číselné výsledky.

Následující tabulka ukazuje srovnání hodnot při klidovém uložení a při roztočení hřídele.

Hodnoty	Reakce ložisko A [N]	Reakce ložisko B [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Napětí ložisko B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	Průhyb letmý konec [mm]
Za klidu	1232	271	5,1	0,212	0,004	-0,002
Za rotace	759	-201	4,91	0,593	0,0017	0,004
Provozní otáčky [ot /min ⁻¹]			2500			
První kritická rychlost [ot /min ⁻¹]						
Hmotná hřídel			10753			
Nehmotná hřídel			28 896			

Tabulka 3 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách

Porovnáním výsledků z tabulky č. 2 je vidět, jak může vliv setrvačníku ovlivnit vyhodnocované veličiny. Hodnoty reakce ložiska A například ukazuje, že by mělo být možné docílit odlehčení ložiska vlastní rotací hřídele. Naopak reakce v ložisku B zase ukazuje, že rotace může mít vliv na směr reakce v ložisku. Ta může někdy, jako třeba v tomto případě mířit vlivem zatížení gyroskopickým momentem na opačnou stranu. Z hodnot napětí je patrné odlehčení napětí ve středu mezi podporami, ovšem napětí v ložisku B narostlo. Průhyb mezi podporami se zmenšil, ovšem letmý konec byl vychýlen na opačnou stranu.

Toto porovnání výsledků pro danou geometrii hřídele ovšem platí jen při zde zadaných provozních otáčkách. Pokud bude při konstrukci uvažována jiná hodnota úhlové rychlosti za provozu hodnoty za rotace se budou patrně lišit. Toto lze předpokládat ze vztahu (2.25), která říká, že vzniklý gyroskopický moment je závislý také na velikosti úhlové rychlosti.

Následující tabulka ukazuje změnu výsledků, při uvážení jiné provozní úhlové rychlosti.

Hodnoty	Reakce ložisko A [N]	Reakce ložisko B [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Napětí ložisko B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	Průhyb letmý konec [mm]
Za klidu	1232	271	5,1	0,212	0,004	-0,002
Za rotace	550	-409	4,8	0,76	0,0003	0,0069
Provozní otáčky [ot /min]			3000			
První kritická rychlost [ot /min]						
Hmotná hřídel			10753			
Nehmotná hřídel			28 896			

Tabulka 4 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách

Výsledky ukazují potvrzení výše uvažovaného předpokladu. Parametry se změnily stejným způsobem jako v předchozím případě. Zvětšením gyroskopického momentu vyšší úhlovou rychlostí došlo k výraznějšímu odlehčení ložiska A, a většímu zatížení ložiska B. Došlo také ke snížení napětí mezi podporami, a průhyb je opět o něco menší, hřídel by tedy měla být rotací ještě více narovnána.

Pro názornost lze ještě uvést případ, kdy provozní otáčky budou nižší než původní uvažované.

Hodnoty	Reakce ložisko A [N]	Reakce ložisko B [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Napětí ložisko B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	Průhyb letmý konec [mm]
Za klidu	1232	271	5,1	0,212	0,004	-0,002
Za rotace	865	-94	4,9	0,5	0,00023	0,0027
Provozní otáčky [ot /min]			2200			
První kritická rychlost [ot /min]						
Hmotná hřídel			10753			
Nehmotná hřídel			28 896			

Tabulka 5 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách

Tabulka 5 opět ukazuje, jak provozní otáčky ovlivní výsledné hodnoty. Všechny veličiny se změnilo oproti prvním uvažovanému případu. Ovšem v porovnání s druhým uvažovaným případem je vliv na výsledné hodnoty menší. Jinými slovy změny reakcí v ložiscích nejsou tak výrazné jako při vyšších provozních rychlostech.

Pro úplnou názornost analyzovaných výsledků bude dále uveden stejný výpočet ještě jednou, ovšem s rozdílnou hodnotou vnitřního průměru d , jak ukazuje následující tabulka pro druhý příklad.

D [mm]	L [mm]	C [mm]	mk [kg]	Ik [kg·m ²]	mr [kg]	n [min ⁻¹]	Dov. průh.	E [GPa]	ρ [kg/m ³]	Re [MPa]	k
300	2000	1000	25	35	40	2500	0,03	210	7850	320	1.5
Konkrétní hodnoty											
d [mm]	C [mm]										
250	550										

Tabulka 6 Vstupní hodnoty pro číselné výsledy (druhý příklad)

Pokud budeme uvažovat stejné provozní otáčky 2500 ot/min⁻¹, ale rozdílnou hodnotu vnitřního průměru výsledné hodnoty se budou oproti hodnotám odlišovat, dle uvedené tabulky.

Hodnoty	Reakce ložisko A [N]	Reakce ložisko B [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Napětí ložisko B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	Průhyb letmý konec [mm]
Za klidu	578	41	3,8	0,24	0,004	-0,0014
Za rotace	357	-179	3,65	0,53	0,001	0,0038
Provozní otáčky [ot /min]			2500			
První kritická rychlost [ot /min]						
Hmotná hřídel			11 421			
Nehmotná hřídel			21 448			

Tabulka 7 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách (druhý příklad)

Odlišnost výsledků po změně vnitřního průměru d je porovnání hodnot oproti původním hodnotám patrná. Dále pro úplnost představy změn zkoumaných hodnot, je vhodné opět uvažovat i případ, co se stane při jiných provozních otáčkách. V následujícím případě jsou

uvedeny výsledky pro otáčky nižší a to opět 2200 ot/min, aby byly výsledky porovnatelné s původním zadáním. Tabulka je pro přehlednost uvedena na následující straně.

Případ změny provozních otáček.

Hodnoty	Reakce ložisko A [N]	Reakce ložisko B [N]	Napětí mezi podporami [MPa]	Napětí ložisko B [MPa]	Průhyb mezi podporami [mm]	Průhyb letmý konec [mm]
Za klidu	578	41	3,8	0,24	0,004	-0,0014
Za rotace	407	-129	3,69	0,46	0,002	0,0027
Provozní otáčky [ot/min]			2200			
První kritická rychlost [ot/min]						
Hmotná hřídel			11 421			
Nehmotná hřídel			21 448			

Tabulka 8 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách (druhý příklad)

Změněnou vnitřního průměru je zejména patrný vliv na velikosti reakcí v ložiscích. Porovnáním jejich hodnot při totožných úhlových rychlostech je vidět, odlehčení ložisek, oproti zadaným vstupům v prvním případě. Došlo také ke snížení hodnot napětí v pozorovaných místech. Naopak hodnoty průhybů zůstávají víceméně stejné, tento důsledek mohl být vcelku očekávatelný, pokud je brán na zřetel trend průběhu hodnot podle uvedených grafických zobrazení. Poslední rozdíl hodnot, který je z výsledků patrný, je odlehčení hřídele vlastní hmotou dochází ke změně kritických úhlových frekvencí. Případě uvažování hmotné hřídele dojde k nárůstu hodnoty, ovšem při uvažování hřídele jako nehmotné, hodnota klesne.

5 Závěr

Cílem této práce bylo, pokusit se prakticky aplikovat poznatky z oblasti pružnosti pevnosti a dynamiky. Myšlenka aplikace teorie gyroskopů a uvažování tohoto zatížení na hřídele samotné ukazuje jisté změny na výsledných hodnotách. Praktická aplikace zohlednění výsledků této práce se nabízí například v oblasti konstruování uložení hřídele v elektromotorech. Jak bylo možné vidět na konkrétních výsledcích, změna orientace sil v ložiscích může vést ke změně zatížení štítu a kostry elektrického stroje. Což může k jejich přesnější, spolehlivější a odolnější konstrukci.

Nabízí se také možnosti, jak by se daly myšlenky uvažované v této práci zdokonalit. První věcí, která by stála za prozkoumání a zdokonalení se nabízí samotný výpočtový model a algoritmus, pro získání požadovaných výsledků. Konkrétně na algoritmu samotném by se dala vylepšit jeho výpočtová náročnost, která je v tomto případě závislá na vzorkovací frekvenci vyhodnocovaných dat. Ta je pevně daná pro jakákoli vstupní data. To může ovlivňovat nerovnoměrnost časové náročnosti na výpočet s ohledem různá vstupní data. Nabízí se zde optimalizace výpočtových časů s ohledem na vstupní data.

Další možností, kterou by bylo možné rozvést dále je, aplikovat vliv velikosti vnitřního průměru a setrvačné účinky nesených hmot na další modely a konfigurace hřídelí s nesenými hmotami a neomezovat se pouze na jeden model. Zohlednění různorodosti konfigurace nesených hmot by stálo za zvážení, jako metoda vyvažování rotačních strojů. Pokud by byly pozorovatelné vlivy chápání nesených hmot jako setrvačníky, mohlo by to vést v konečném důsledku k vyvážení excentricit při deformacích rotačních strojů. Tímto by se mohlo dát dosáhnout plynulejších a tlumenějších chodů rotujících strojů.

6 Použité zdroje a literatura

- [1] JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA J., BURŠA, J.: Pružnost a pevnost I, VUT-FSI, Brno, 2004.
- [2] ULÍŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika*. Praha: SNTL, 1987. Technický průvodce.
- [3] MEDVEC, Andrej. *Mechanika III: dynamika: celoštátna vysokoškolská učebnica pre strojnické fakulty vysokých škôl*. Bratislava: Alfa, 1988. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry.
- [4] ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. *MATLAB: tvorba uživatelských aplikací*. Praha: BEN - technická literatura, 2004. ISBN 80-7300-133-0.
- [5] ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. *MATLAB pro začátečníky*. Praha: BEN - technická literatura, 2003. ISBN 80-7300-095-4.
- [6] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vydání třetí. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.

7 Seznam obrázků

Obr. 1 Schéma	16
Obr. 2 Úplné uvolnění	17
Obr. 3 Znázornění deformace.....	17
Obr. 4 Znázornění gyroskopu na hřídeli	19
Obr. 5 Úplné uvolnění za rotace.....	21
Obr. 6 Kóty pro příčnickové součinitele	23
Obr. 7 Kalkulátor DutýHřidel	25
Obr. 8 Průběh závislosti napětí mezi podporami za klidu.....	29
Obr. 9 Průběh závislosti napětí mezi podporami za rotace	30
Obr. 10 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za klidu	31
Obr. 11 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za rotace	32
Obr. 12 Průběh závislosti průhybu letmého konce za klidu.....	33
Obr. 13 Průběh závislosti průhybu mezi podporami za rotace	34

8 Seznam tabulek

Tabulka 1 Vstupní hodnoty pro grafické zobrazení	29
Tabulka 2 Vstupní hodnoty pro číselné výsledky	34
Tabulka 3 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách	35
Tabulka 4 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách	35
Tabulka 5 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách	36
Tabulka 6 Vstupní hodnoty pro číselné výsledky (druhý příklad).....	36
Tabulka 7 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách (druhý příklad).....	36
Tabulka 8 Výsledné hodnoty při daných provozních otáčkách (druhý příklad)	37

9 Seznam příloh

Na přiloženém CD disku jsou uloženy následující soubory:

Bakalarska_prace.pdf (Vlastní text práce)

dutyHridel.exe (Program pro využití duté hřídele)

dutyHridel.zip (Zdrojový kód samotného programu spolu s funkcemi)